Matematické modely v medicíně

Lékař a matematika

Dušan Merta[1] Pavel Vychodil[2]

[1]Klinika anesteziologie, resuscitace a intenzivní péče
IKEM

[2]Ředitelství zeměkoule

Jizerky, 2009

Obsah

Možnosti matematiky v medicíně (a biologii)

- Dynamické modely
- Statistická analýza
- Fitování křivek na naměřená data
- Molekulární genetika – fylogenetické stromy
- Farmakologie
- Fourierova analýza (EEG)
- ...

Matematický model

Ideální vlastnosti

- Exaktní popis důležitých vlastností systému
- Zanedbání nepodstatného

Matematický model

Ideální vlastnosti

- Exaktní popis důležitých vlastností systému
- Zanedbání nepodstatného
- Existence přesného analytického řešení

Matematický model

Ideální vlastnosti

- Exaktní popis důležitých vlastností systému
- Zanedbání nepodstatného
- Existence přesného analytického řešení

Vždy je to jen model – rozhodující je srovnání s realitou!

Malthusiánský model

- Populace v čase t: N_t jedinců (buněk, baktérií, lidí, sněhuláků, ...), např. 742

Malthusiánský model

- Populace v čase t: N_t jedinců (buněk, baktérií, lidí, sněhuláků, ...), např. 742
- Jeden časový krok:
  - $d = 1/70$ populace uhyne
  - $f = 4/100$ přírustek

Malthusiánský model

- Populace v čase t: N_t jedinců (buněk, baktérií, lidí, sněhuláků, ...), např. 742
- Jeden časový krok:
  - $d = 1/70$ populace uhyne
  - $f = 4/100$ přírustek
- Populace v čase $t+1$:
  $N_{t+1} = N_t + f \cdot N_t - d \cdot N_t = 742 + 4/100 \cdot 742 - 1/70 \cdot 724 \cong 761$

$$
\begin{aligned}
N_{t+1} &= N_t + f \cdot N_t - d \cdot N_t = \\
&= (1 + f - d) \cdot N_t \\
&= \lambda \cdot N_t; \qquad \lambda = (1 + f - d)
\end{aligned}
$$

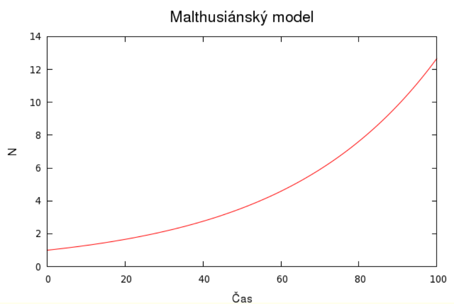
Malthusiánský model

- Populace v čase t: N_t jedinců (buněk, baktérií, lidí, sněhuláků, ...), např. 742
- Jeden časový krok:
  - $d = 1/70$ populace uhyne
  - $f = 4/100$ přírustek
- Populace v čase $t+1$:
  $N_{t+1} = N_t + f \cdot N_t - d \cdot N_t = 742 + 4/100 \cdot 742 - 1/70 \cdot 724 \cong 761$

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= N_t + f \cdot N_t - d \cdot N_t = \\ &= (1 + f - d) \cdot N_t \\ &= \lambda \cdot N_t; \qquad \lambda = (1 + f - d) \end{aligned}$$

- Populace v libovolném čase (např. $t + 500$):
  $N_{t+500} = \lambda^{500} \cdot N_t = (1 + 4/100 - 1/70)^{500} \cdot 742 \cong 1{,}025^{500} \cdot 742 \cong 326 \cdot 742 \cong 241\,883\,375$

Malthusiánský model



Čas	N
0	742
1	761
2	781
3	801
4	821
5	842
⋮	⋮
10	956
⋮	⋮
100	9 398
⋮	⋮
500	241 883 375

Nelineární model

- $\frac{\Delta N}{N}$ – poměrný přírustek
  - Malth. model:
    $\Delta N = (f - d) \cdot N$
    $\frac{\Delta N}{N} = f - d = r$ (konst.)

Nelineární model

- $\frac{\Delta N}{N}$ – poměrný přírustek
  - Malth. model:
    $\Delta N = (f - d) \cdot N$
    $\frac{\Delta N}{N} = f - d = r$ (konst.)
- $\frac{\Delta N}{N} = r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ – diskrétní logistický model

Nelineární model

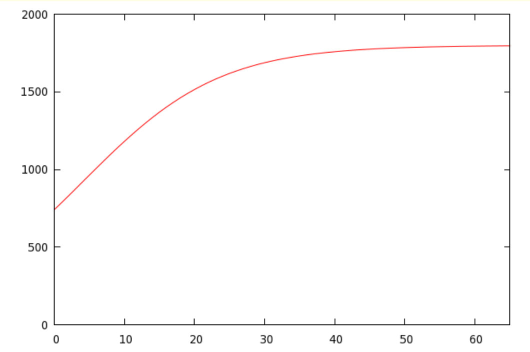
- $\frac{\Delta N}{N}$ – poměrný přírustek
  - Malth. model:
    $\Delta N = (f - d) \cdot N$
    $\frac{\Delta N}{N} = f - d = r$ (konst.)
- $\frac{\Delta N}{N} = r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ – diskrétní logistický model
- K – „nosná kapacita systému“ *(carrying capacity)*
  - volba jednotek
  - rovnovážný stav

Nelineární model

- $\frac{\Delta N}{N}$ – poměrný přírustek
  - Malth. model:
    $\Delta N = (f - d) \cdot N$
    $\frac{\Delta N}{N} = f - d = r$ (konst.)
- $\frac{\Delta N}{N} = r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$ – diskrétní logistický model
- K – „nosná kapacita systému“ *(carrying capacity)*
  - volba jednotek
  - rovnovážný stav
- pro $N \ll K$: $\frac{\Delta N}{N} \approx r$ ($\rightarrow$ Malth. model)

Nelineární model

Chování pro různá r

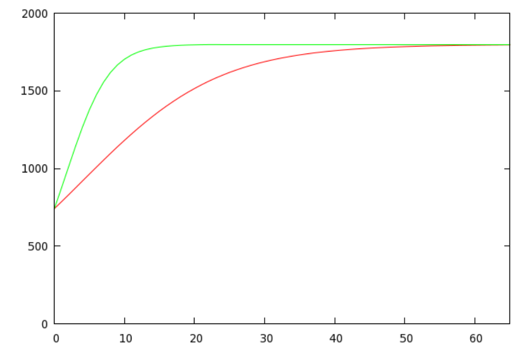


$$N_{t+1} = N_t + N_t \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $r < 1{,}0$
  - monotónní funkce
  - $r = 0{,}1$
- $1{,}0 < r < 2{,}0$
  - oscilace
- $r > 2{,}0$
  - stochastický chaos

Nelineární model

Chování pro různá r

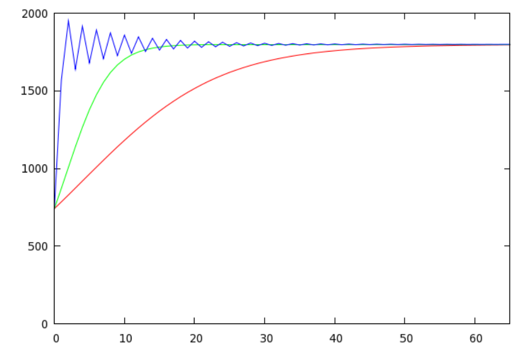


$$N_{t+1} = N_t + N_t \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $r < 1{,}0$
  - monotónní funkce
  - $r = 0{,}1$
  - $r = 0{,}3$
- $1{,}0 < r < 2{,}0$
  - oscilace
- $r > 2{,}0$
  - stochastický chaos

Nelineární model

Chování pro různá r

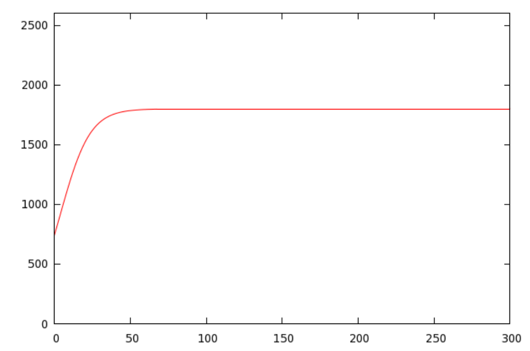


$$N_{t+1} = N_t + N_t \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $r < 1{,}0$
  - monotónní funkce
  - $r = 0{,}1$
  - $r = 0{,}3$
- $1{,}0 < r < 2{,}0$
  - oscilace
  - $r = 1{,}9$
- $r > 2{,}0$
  - stochastický chaos

Nelineární model

Chování pro různá *r*

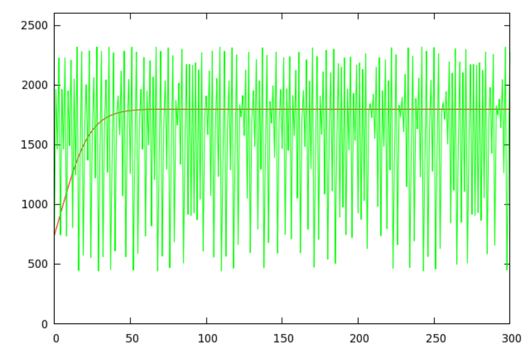


$$N_{t+1} = N_t + N_t \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $r < 1{,}0$
  - monotónní funkce
  - $r = 0{,}1$
- $1{,}0 < r < 2{,}0$
  - oscilace
- $r > 2{,}0$
  - stochastický chaos

Nelineární model

Chování pro různá r



$$N_{t+1} = N_t + N_t \cdot r \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

- $r < 1{,}0$
  - monotónní funkce
  - $r = 0{,}1$
- $1{,}0 < r < 2{,}0$
  - oscilace
- $r > 2{,}0$
  - stochastický chaos
  - $r = 2{,}9$

Predátor a kořist

- *P* – množství predátorů
- *Q* – množství kořisti

Predátor a kořist

- P – množství predátorů
- Q – množství kořisti
- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{K}\right)$

Predátor a kořist

- P – množství predátorů
- Q – množství kořisti
- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - s \cdot PQ$

Predátor a kořist

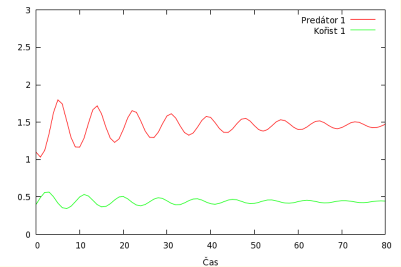
- P – množství predátorů
- Q – množství kořisti
- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot (1 - \frac{Q}{K}) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P$

Predátor a kořist

- P – množství predátorů
- Q – množství kořisti
- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P + v \cdot PQ$

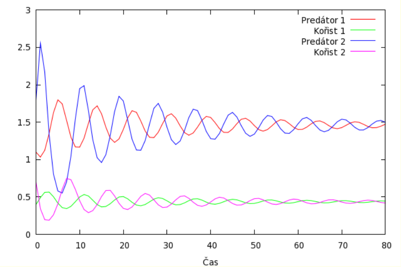
Predátor a kořist

- P – množství predátorů
- Q – množství kořisti
- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot (1 - \frac{Q}{K}) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P + v \cdot PQ$
- r, s, u, v a K – parametry modelu
- PQ – *mass action*



Predátor a kořist

- P – množství predátorů
- Q – množství kořisti
- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot (1 - \frac{Q}{K}) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P + v \cdot PQ$
- r, s, u, v a K – parametry modelu
- PQ – *mass action*



Predátor a kořist

Rovnovážný stav

- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P + v \cdot PQ$
- Rovnovážný stav: $\Delta P = 0$ a $\Delta Q = 0$

$$r = 1{,}3;\ s = 0{,}5;\ u = 0{,}7;\ v = 1{,}6;\ K = 1$$

Predátor a kořist

Rovnovážný stav

- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P + v \cdot PQ$
- Rovnovážný stav: $\Delta P = 0$ a $\Delta Q = 0$

$$\begin{aligned}
\Delta P &= 0 \\
-u \cdot P_{eq} + v \cdot P_{eq} Q_{eq} &= 0 \\
v \cdot P_{eq} Q_{eq} &= u \cdot P_{eq} \\
v \cdot Q_{eq} &= u \\
Q_{eq} &= \frac{u}{v} \\
Q_{eq} &= 0{,}44
\end{aligned}$$

$$r = 1{,}3;\ s = 0{,}5;\ u = 0{,}7;\ v = 1{,}6;\ K = 1$$

Predátor a kořist

Rovnovážný stav

- $\Delta Q = r \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{Q}{K}\right) - s \cdot PQ$
- $\Delta P = -u \cdot P + v \cdot PQ$
- Rovnovážný stav: $\Delta P = 0$ a $\Delta Q = 0$

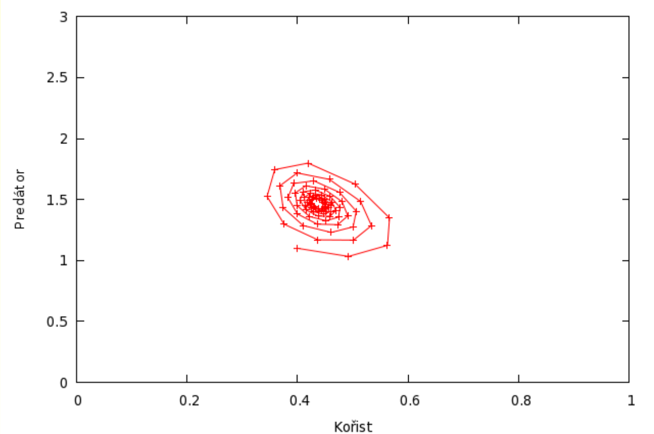
$$\begin{aligned}
\Delta P &= 0 \\
-u \cdot P_{eq} + v \cdot P_{eq} Q_{eq} &= 0 \\
v \cdot P_{eq} Q_{eq} &= u \cdot P_{eq} \\
v \cdot Q_{eq} &= u \\
Q_{eq} &= \frac{u}{v} \\
Q_{eq} &= 0{,}44
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Q &= 0 \\
&\vdots \\
P_{eq} &= \frac{r}{s} \cdot \left(1 - \frac{Q_{eq}}{K}\right) \\
P_{eq} &= 1{,}46
\end{aligned}$$

$$r = 1{,}3;\ s = 0{,}5;\ u = 0{,}7;\ v = 1{,}6;\ K = 1$$

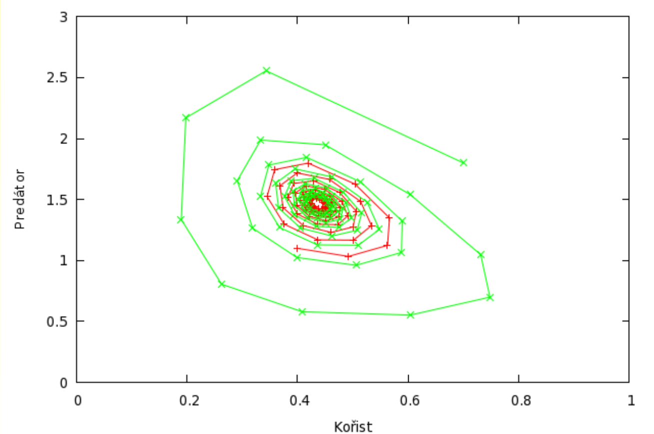
Predátor a kořist

Rovnovážný stav



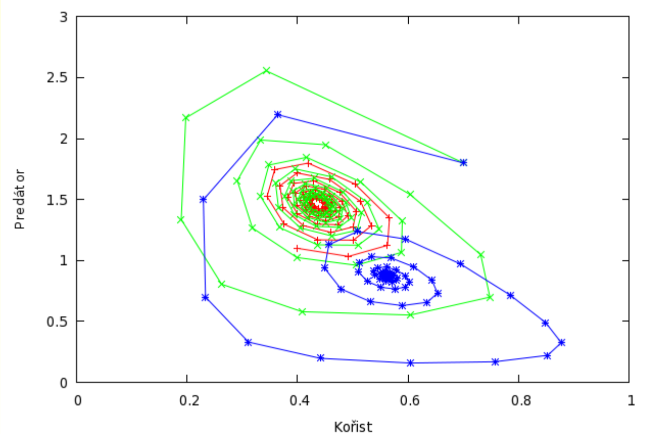
Predátor a kořist

Rovnovážný stav



Predátor a kořist

Rovnovážný stav



„Model“ imunitní reakce

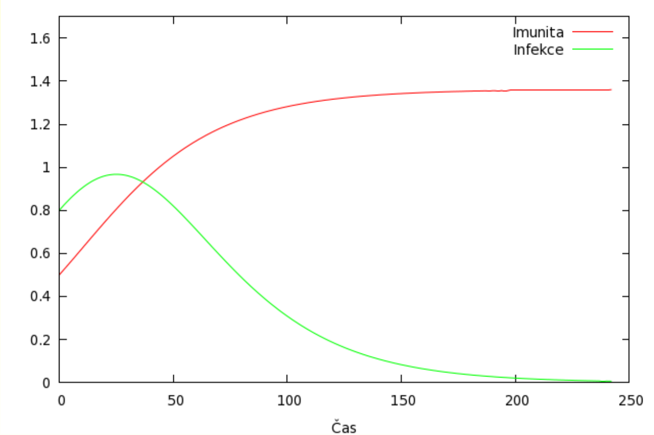
- *P* – intenzita imunitní reakce (*T* buňky, *Ig*, . . .)
- *Q* – míra infekce (*PCT*, *Leu*, . . .)

„Model“ imunitní reakce

- P – intenzita imunitní reakce (T buňky, Ig, ...)
- Q – míra infekce (PCT, Leu, ...)
- $\Delta P = r \cdot Q - s \cdot PQ$
- $\Delta Q = u \cdot Q - v \cdot PQ$

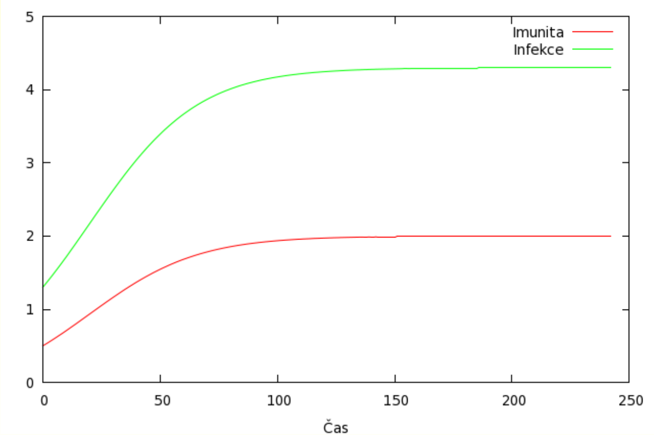
„Model“ imunitní reakce

Uzdravení



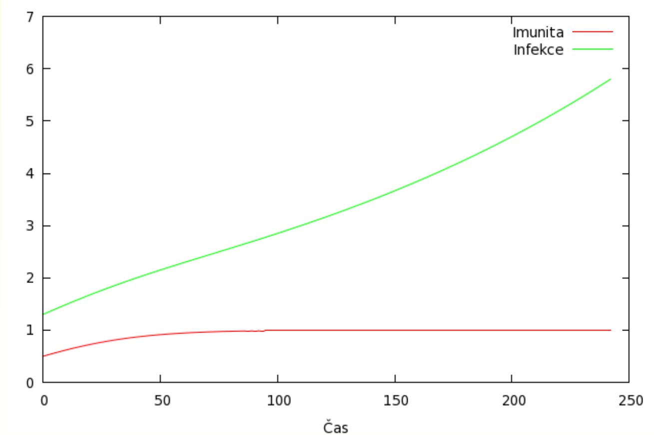
„Model“ imunitní reakce

Kolonizace



„Model“ imunitní reakce

Sepse



Strukturovaná populace

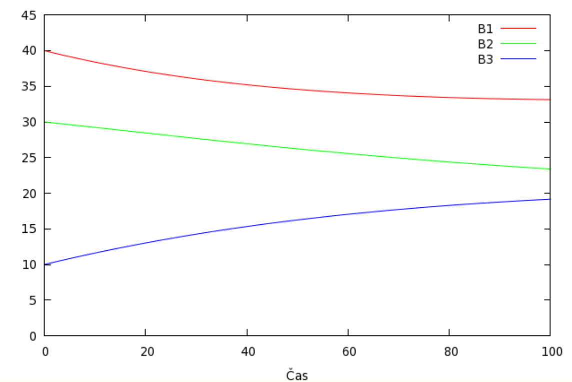
- Populace buněk – 3 stádia
- $B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3$
- B_3 uvolňuje růstový faktor, díky kterému se dělí B_1

Strukturovaná populace

- Populace buněk – 3 stádia
- $B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3$
- B_3 uvolňuje růstový faktor, díky kterému se dělí B_1

$$
\begin{aligned}
B_{1,t+1} &= 0{,}9925 \cdot B_{1,t} + 0{,}0125 \cdot B_{3,t} \\
B_{2,t+1} &= 0{,}9875 \cdot B_{2,t} + 0{,}0075 \cdot B_{1,t} \\
B_{3,t+1} &= 0{,}9915 \cdot B_{3,t} + 0{,}0085 \cdot B_{2,t}
\end{aligned}
$$

Strukturovaná populace



$$B_{1,0} = 40; \quad B_{2,0} = 30; \quad B_{3,0} = 10$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus

$$
\begin{aligned}
B_{1,t+1} &= 0{,}9925 \cdot B_{1,t} + 0{,}0000 \cdot B_{2,t} + 0{,}0125 \cdot B_{3,t} \\
B_{2,t+1} &= 0{,}0075 \cdot B_{1,t} + 0{,}9875 \cdot B_{2,t} + 0{,}0000 \cdot B_{3,t} \\
B_{3,t+1} &= 0{,}0000 \cdot B_{1,t} + 0{,}0085 \cdot B_{2,t} + 0{,}9915 \cdot B_{3,t}
\end{aligned}
$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus

$$
\begin{aligned}
B_{1,t+1} &= 0{,}9925 \cdot B_{1,t} + 0{,}0000 \cdot B_{2,t} + 0{,}0125 \cdot B_{3,t} \\
B_{2,t+1} &= 0{,}0075 \cdot B_{1,t} + 0{,}9875 \cdot B_{2,t} + 0{,}0000 \cdot B_{3,t} \\
B_{3,t+1} &= 0{,}0000 \cdot B_{1,t} + 0{,}0085 \cdot B_{2,t} + 0{,}9915 \cdot B_{3,t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} B_{1,t+1} \\ B_{2,t+1} \\ B_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9925 & 0{,}0000 & 0{,}0125 \\ 0{,}0075 & 0{,}9875 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0085 & 0{,}9915 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,t} \\ B_{2,t} \\ B_{3,t} \end{pmatrix}
$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus

$$
\begin{aligned}
B_{1,t+1} &= 0{,}9925 \cdot B_{1,t} + 0{,}0000 \cdot B_{2,t} + 0{,}0125 \cdot B_{3,t} \\
B_{2,t+1} &= 0{,}0075 \cdot B_{1,t} + 0{,}9875 \cdot B_{2,t} + 0{,}0000 \cdot B_{3,t} \\
B_{3,t+1} &= 0{,}0000 \cdot B_{1,t} + 0{,}0085 \cdot B_{2,t} + 0{,}9915 \cdot B_{3,t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} B_{1,t+1} \\ B_{2,t+1} \\ B_{3,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9925 & 0{,}0000 & 0{,}0125 \\ 0{,}0075 & 0{,}9875 & 0{,}0000 \\ 0{,}0000 & 0{,}0085 & 0{,}9915 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{1,t} \\ B_{2,t} \\ B_{3,t} \end{pmatrix}
$$

$$
\vec{B}_{t+1} = T \cdot \vec{B}_t
$$

T – *přechodová matice (transition matrix)*

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus – násobení matic

$$\vec{B}_{t+2} = T \cdot \vec{B}_{t+1} = T \cdot T \cdot \vec{B}_t = T^2 \cdot \vec{B}_t$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus – násobení matic

$$\vec{B}_{t+2} = T \cdot \vec{B}_{t+1} = T \cdot T \cdot \vec{B}_t = T^2 \cdot \vec{B}_t$$

$$C_{[m\times l]} = A_{[m\times n]} \cdot B_{[n\times l]}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus – násobení matic

$$\vec{B}_{t+2} = T \cdot \vec{B}_{t+1} = T \cdot T \cdot \vec{B}_t = T^2 \cdot \vec{B}_t$$

$$C_{[m \times l]} = A_{[m \times n]} \cdot B_{[n \times l]}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus – násobení matic

$$\vec{B}_{t+2} = T \cdot \vec{B}_{t+1} = T \cdot T \cdot \vec{B}_t = T^2 \cdot \vec{B}_t$$

$$C_{[m\times l]} = A_{[m\times n]} \cdot B_{[n\times l]}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Strukturovaná populace

Maticový formalizmus – násobení matic

$$\vec{B}_{t+2} = T \cdot \vec{B}_{t+1} = T \cdot T \cdot \vec{B}_t = T^2 \cdot \vec{B}_t$$

$$C_{[m \times l]} = A_{[m \times n]} \cdot B_{[n \times l]}$$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \qquad A \cdot B \neq B \cdot A$$

Strukturovaná populace

Rovnovážný stav, vlastní čísla a vektory

Definice

Vektor $\vec{v}$ a číslo λ jsou vlastním vektorem a vlastním číslem matice T, pokud platí: $T \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

Věta

Libovolný vektor může být zapsán jako součet vlastních vektorů: $\vec{a} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \vec{v}_n$

Strukturovaná populace

Rovnovážný stav, vlastní čísla a vektory

Definice

Vektor $\vec{v}$ a číslo λ jsou vlastním vektorem a vlastním číslem matice T, pokud platí: $T \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

Věta

Libovolný vektor může být zapsán jako součet vlastních vektorů: $\vec{a} = c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \vec{v}_n$

- Vlastní vektory $\vec{v}$ představují rovnovážný stav systému
- Rozkladem $\vec{a}_0$ na vlastní vektory lze spočítat stav populace v čase t bez nutnosti výpočtu T^t:
  $\vec{a}_t = T^t \cdot \vec{a}_0 = T^t \cdot (c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \vec{v}_n) =$
  $c_1 \cdot \lambda_1^t \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \lambda_2^t \cdot \vec{v}_2 + \cdots + c_n \cdot \lambda_n^t \cdot \vec{v}_n$

K dalšímu čtení

- E. S. Allman, J. A. Rhodes
  Mathematical Models In Biology An Introduction
  Cambridge, 2004
- Y. Takeuchi, Y. Iwasa, K. Sato (Eds.)
  Mathematics For Life Science And Medicine
  Springer, 2007
- J. D. Nagy
  Competition And Natural Selection In A Mathematical Model Of Cancer
  Bulletin of Mathematical Biology, (2004) 66, 663–687

LATEX 2_ε

Diferenční a diferenciální rovnice

Diferenční rovnice

- $N_{t+\Delta t} = N_t + \Delta N$
- Δt konečné
- Výpočet N_{t+1} pomocí N_t, není vždy možné najít N_{t+n} jako funkci N_t

Diferenciální rovnice

- $N_{t+dt} = N_t + \frac{dN_t}{dt}$
- dt nekonečně malé (infinitezimální)
- Výsledkem řešení je *funkce*, ne *číslo*
- Někdy (zřídka) je možné analytické řešení

Výpočet vlastních čísel a vektorů ($M_{[2\times2]}$)

- $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

Výpočet vlastních čísel a vektorů ($M_{[2\times 2]}$)

- $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$
- $M \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = 0$
- $M \cdot \vec{v} - \lambda \cdot I \cdot \vec{v} = 0$
- $(M - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = 0$

Výpočet vlastních čísel a vektorů ($M_{[2\times 2]}$)

- $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$
- $M \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = 0$
- $M \cdot \vec{v} - \lambda \cdot I \cdot \vec{v} = 0$
- $(M - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = 0$
- $\nexists (M - \lambda \cdot I)^{-1} \Rightarrow \det(M - \lambda \cdot I) = 0$

Výpočet vlastních čísel a vektorů ($M_{[2\times2]}$)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$$

- $M \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$
- $M \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = 0$
- $M \cdot \vec{v} - \lambda \cdot I \cdot \vec{v} = 0$
- $(M - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = 0$
- $\nexists (M - \lambda \cdot I)^{-1} \Rightarrow \det(M - \lambda \cdot I) = 0$
- $\begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $(a - \lambda) \cdot x + b \cdot y = 0$
  $c \cdot y + (d - \lambda) \cdot y = 0$